Les développements limités

Chloé Clavel,
chloe.clavel@telecom-paristech.fr,

Telecom ParisTech, France

Plan du cours

Introduction

Définition

Unicité

DLs usuels

Pour aller plus loin

Quizz

1. Formule de Taylor-Young écrite en $a = 0$
2. Inégalité de Taylor-Lagrange
3. Formule de Taylor avec reste intégral

Plan du cours

Introduction

Définition

Unicité

DLs usuels

Pour aller plus loin

Objectifs des DL

En mathématiques : Lever l'indétermination

Les développements limités permettent de lever la plupart des formes indéterminées dans le calcul des limites.

En physique : approcher une fonction

Approximation d'une fonction par un polynôme à condition que le reste soit inférieur à l'erreur autorisée.
Développement d'ordre 1 : **approximation linéaire** ou **approximation affine**

Plan du cours

Introduction

Définition

Unicité

DLs usuels

Pour aller plus loin

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ admettant 0 pour point intérieur. Soient f définie sur I et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (en abrégé $DL_n(0)$) s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que quand $x \to 0$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

La fonction polynomiale $x \to a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est alors appelée **partie régulière** du $DL_n(0)$ de f en 0.
Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, on dit que $a_k x^k$ est la **partie principale** de l'infiniment petit f(x)

Remarques

- Si on veut écrire le DL en $a \in I$ $DL_n(a)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

- chaque terme de la somme est négligeable par rapport à celui qui précède $a_n(x-a)^n$ est négligeable devant $a_{n-1}(x-a)^{n-1}$

Remarques

- Un $DL_n(a)$ donne une information sur le comportement de f en a et uniquement en a
- f admet un DL à l'ordre 0 en a ssi f converge en a et $\lim_{a} f = a_0$
- Si f admet un $DL_n(0)$ alors si $p < n$ un entier f admet un $DL_p(0)$. Par contre, la réciproque est fausse. Un développement à l'ordre n est d'autant plus précis que n est grand.

Exemple/EXO

Ecrire $1 + +x + ... + x^n$ sous la forme d'un quotient. En déduire le développement limité de $f(x) = \frac{1}{1-x}$

DL et formule de Taylor Mac-Laurin

Théorème Si f^n existe et est continue dans I, alors f admet au voisinage de 0, le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

et on retrouve la formule de Taylor Mac-Laurin

Plan du cours

Introduction

Définition

Unicité

DLs usuels

Pour aller plus loin

Théorème d'unicité

Théorème Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, ce développement est unique.
Demo par l'absurde

Application

Ecrire le DL d'une fonction paire et d'une fonction d'impaire

Plan du cours

Introduction

Définition

Unicité

DLs usuels

Pour aller plus loin

DLs usuels

- a^x pour $a > 0$
- e^x
- $cos(x)$
- $sin(x)$
- $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{1+x}$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- $\frac{1}{1+x}$
- $\frac{1}{1-x}$

Plan du cours

Introduction

Définition

Unicité

DLs usuels

Pour aller plus loin

Quelques références

Cours de mathématiques du premier cycle : 1e année Jacques Dixmier – Dunod
Analyse, Licence – Maurice Gaultier
Cours cpge puydelome : http://mp.cpgedupuydelome.fr/cours.php?id=3993&idPartie=81444
Exos cpgepuydelome :
http://mp.cpgedupuydelome.fr/mesexos.php?idSect=241