Formules de Taylor

Chloé Clavel,
chloe.clavel@telecom-paristech.fr,

Telecom ParisTech, France

Plan du cours

Plan du cours

Principe

Un peu d'histoire

La formule de Taylor (1715), du nom du mathématicien Brook Taylor

Principe

Approximation d'une fonction f(x) plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point a par un polynôme dont les coefficients dépendent des dérivées en a $f'(a), \ldots, f^n(a)$.

Préambule

Retour sur les polynômes

Etant donné un polynôme de degré n, on sait calculer $P(x)$ en fonction de ses dérivées en 0.
Mais pas pour une fonction quelconque.
La formule de Taylor permet d'avoir une formule analogue avec un terme supplémentaire.

Rappel (cours sur la dérivation)

Si f dérivable en $a \in \mathbb{R}$, au voisinage de a, nous avons
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$
On veut ici étendre la formule au degré n

Plan du cours

Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n dans un intervalle fermé d'extrémités a et b, $(f \in \mathcal{C}^n([a,b]))$,

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^(n-1)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \int_a^b \frac{(b-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^n(t) dt$$

Demo : par récurrence (utiliser l'intégration par parties)
EXO : écrire la formule avec $b = a + h$

Plan du cours

TELECOM ParisTech

Formule précédente avec $b = a + h$

Avec $b = a + h$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors pour $a \in I$ et pour tout accroissement h tel que $a + h \in I$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^(n-1)}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

$$\underbrace{+\int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^n(t)dt}_{I(h)}$$

Inégalité de Taylor-Lagrange : montrons qu'il existe M_0 tel que $|I(h)| \leq M_0 \frac{h^n}{n!}$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Demo : Montrons qu'il existe M_0 tel que $|I(h)| \leq M_0 \frac{h^n}{n!}$ avec $I(h) = \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^n(t)dt$

Indication : Il existe $h_0 > 0$ tel que $[a - h_0, a + h_0] \in I$, comme $f \in \mathcal{C}^n(I)$, f^n est continue sur I

$\Rightarrow$ f^n bornée sur l'intervalle compact I

$\Rightarrow$ poser $M_0 = \sup_I |f^n(t)|$ et évaluer le reste intégral $I(h)$ quand $a + h \in I$

Inégalité de Taylor-Lagrange

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors pour $a \in I$ et pour tout accroissement h tel que $a + h \in I$, on a :

$$\underbrace{|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^k(a)|}_{|I(a)|} \leq M_0 \frac{h^n}{n!}$$

avec $M_0 = \sup_I |f^n(t)|$

EXO : écrire la formule pour $n = 1$ et $b = a + h$, à quoi cela vous fait-il penser ?

Plan du cours

Préambule

Inégalité de Taylor Lagrange :

$$\underbrace{\left|f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^k(a)\right|}_{|I(a)|} \leq M_0 \frac{h^n}{n!}$$

Remarque On a donc $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^k(a) + \underbrace{I(h)}_{o(h^{n-1})}$

$\Rightarrow$ on a approché f par un polynôme de degré n-1 avec un reste en $o(h^{n-1})$

TELECOM ParisTech

Formule de Taylor Young

Objectif

Gagner un degré dans la partie polynômiale

Formule de Taylor-Young

Soit f $\in \mathcal{C}^n(I)$, alors $\forall a \in I$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^k(a) + o(h^n)$$

Remarque

La même formule écrite en $a = 0$ est la formule de Mac-Laurin

Demonstration

Indications : on part de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{(}n-1)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$+ \int_a^b \frac{(b-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^n(t) dt$$

Egalité de Taylor-Lagrange

Soint $n \in \mathbb{N}$ et soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$. Alors : $\exists c \in [a,b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c)$$

Plan du cours

Quelques références

Cours de mathématiques du premier cycle : 1e année Jacques Dixmier – Dunod
Exos et cours :`http://mp.cpgedupuydelome.fr/cours.php?id=6884&idPartie=37686&dem=37691#id37690`